

# KESTABILAN MODEL POPULASI SATU MANGSA-DUA PEMANGSA DENGAN PEMANENAN PADA PEMANGSA

Muhammad Ikbal<sup>1)</sup>, Syamsuddin Toaha<sup>2)</sup>, Kasbawati<sup>3)</sup>

<sup>1)2)3)</sup> Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,

Universitas Hasanuddin

Jln. Perintis Kemerdekaan, KM 10, Makassar

<sup>1)</sup>muhammadikbal888@gmail.com

<sup>2)</sup>syamsuddint@yahoo.com

<sup>3)</sup>kasbawati@gmail.com

**Abstract**— Tulisan ini mengkaji suatu model pertumbuhan dua populasi pemangsa saling berkompetisi secara langsung mendapatkan satu populasi mangsa yang sama. Fungsi predasi dari dua pemangsa diasumsikan sama yaitu mengikuti fungsi predasi Holling tipe I. Dengan asumsi bahwa kedua populasi pemangsa bernilai ekonomi, maka fungsi pemanenan dilibatkan dalam model. Pada model tersebut dilakukan analisis tentang syarat kewujudan dan kestabilan titik keseimbangan interior. Analisis kestabilan titik keseimbangan interior dilakukan dengan metode linearisasi dan memperhatikan nilai eigen dari persamaan karakteristik dari matriks Jacobi yang diperoleh. Analisis kestabilan titik keseimbangan dilakukan sebelum dan sesudah diberikan pemanenan.

**Kata Kunci**— Model mangsa pemangsa, Titik keseimbangan, Kompetisi, Kestabilan lokal, Pemanenan

## I. PENDAHULUAN

Ada banyak peneliti yang memodelkan interaksi mangsa-pemangsa. Alebraheem dan Abu Hasan (2012) meneliti tentang ketahanan pemangsa dalam sistem model mangsa-pemangsa dengan solusi non-periodik. Das (2011) membahas tentang dinamika model mangsa-pemangsa dengan pemangsa yang berpenyakit. Farajzadeh dkk., (2012) dalam jurnalnya membahas tentang kestabilan model Gauss satu mangsa dua pemangsa. Gakkhar, dkk., (2007) meneliti tentang kompetisi dua pemangsa terhadap satu mangsa. Gupta dan Chandra (2017) membahas tentang dinamika model mangsa-pemangsa dengan pemanenan kuadratik. Penelitian dari Kar dan Matsuda (2007) membahas tentang dinamika global dan kontrol dari model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe III. Kar (2010) meneliti tentang model reaksi dinamika sistem mangsa-pemangsa. Mukhopadhyay dan Bhattacharyya (2015), mengkaji tentang pengaruh

pemanenan dan kompetisi antara pemangsa dalam model mangsa-pemangsa. Ndam dkk., (2012) membahas tentang suatu model interaksi tiga spesies dalam satu habitat. Upadhyay dan Raw (2011) membahas tentang dinamika kompleks dari model rantai makanan tiga spesies dengan fungsi respon Holling tipe III.

## II. TINJAUAN PUSTAKA

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \alpha_1 PH_1 - \frac{e_2 \alpha_2 PH_2}{h + P} \\ \frac{dH_1}{dt} &= e_1 \alpha_1 PH_1 - \beta_1 H_1 H_2 - d_1 H_1 \\ \frac{dH_2}{dt} &= \frac{e_2 \alpha_2 PH_2}{h + P} - \beta_2 H_1 H_2 - d_2 H_2 - q_2 E_2 H_2\end{aligned}\quad (1)$$

dengan nilai awal

$$P(0) > 0; H_1(0) \geq 0; H_2(0) \geq 0$$

Pemodelan matematika oleh Mukhopadhyay dan Bhattacharyya (2015) menjelaskan tiga persamaan diferensial dan secara konsisten dua pemangsa ( $H_1$  dan  $H_2$ ) mengeksploitasi satu mangsa  $P$ . Kedua spesies pemangsa tersebut diasumsikan mempunyai akses/berhubungan langsung dengan mangsa. Mereka (kedua populasi) memberi pengaruh yang sama kuat terhadap mangsa dan mereka berkompetisi. Pengaruh gangguan dalam angka pertumbuhan pesaing diasumsikan proporsional terhadap kepadatan populasi pemangsa dengan  $\beta_1$  dan  $\beta_2$  masing-masing angka gangguan yang diberikan. Akan tetapi, fungsi predasi dari dua pemangsa dibuat berbeda –satu mengikuti respon Holling tipe I dan yang lainnya mengikuti respon Holling tipe II. Disamping mengalami pengurangan karena adanya fungsi predasi, populasi mangsa tumbuh logistik dengan  $r$  sebagai angka pertumbuhan intrinsik dan  $K$  sebagai kapasitas tampung. Diasumsikan juga bahwa pemangsa  $H_2$  dapat dipanen. Konstanta  $E$  dan  $q$  masing-masing menunjukkan usaha pemanenan dan konstanta ketertangkapan.

### III. METODE PENELITIAN

#### A. Tahap Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi yang menunjang penelitian. Pemahaman mengenai masalah kestabilan sangat membantu dalam penyelesaian model tersebut.

#### B. Tahap Analisis Model

Pada tahap ini model dianalisis dengan cara mencari titik setimbang kemudian diperiksa kestabilannya. Karena persamaan model merupakan persamaan diferensial tak linear maka model perlu dilinearisasikan terlebih dahulu dengan membentuk matriks Jacobian, selanjutnya diteliti kestabilannya dengan melihat nilai eigen atau menggunakan metode Routh-Hurwitz.

#### C. Tahap Simulasi Model

Pada tahap ini simulasi dilakukan untuk melihat perilaku dari kurva solusi.

#### D. Tahap Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini dilakukan analisis terhadap hasil yang telah diperoleh dari simulasi.

#### E. Tahap Kesimpulan

Pada tahap ini kesimpulan ditarik dari model yang telah dianalisis kestabilan serta hasil dari simulasi.

### IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### A. Model

Kami akan mengkaji model satu mangsa-dua pemangsa yang melibatkan interaksi antar pemangsa dan interaksi antar individu dalam populasi pemangsa. Berikut asumsi-asumsi yang digunakan dalam model.

1. Laju pertumbuhan mangsa menggunakan laju pertumbuhan logistik.
2. Pemangsa saling berkompetisi mendapatkan mangsa.
3. Menggunakan fungsi respon Holling tipe I dalam pemangsaan.
4. Terdapat kompetisi intraspesifik pada masing-masing pemangsa.
5. Pemangsa bernilai ekonomis sehingga dapat dipanen.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \alpha_1 PH_1 - \alpha_2 PH_2 \\ \frac{dH_1}{dt} &= e_1 \alpha_1 PH_1 - g_1 H_1^2 - \beta_1 H_1 H_2 - d_1 H_1 - q_1 E_1 H_1 \\ \frac{dH_2}{dt} &= e_2 \alpha_2 PH_2 - g_2 H_2^2 - \beta_2 H_1 H_2 - d_2 H_2 - q_2 E_2 H_2\end{aligned}\quad (2)$$

dengan  $P$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  adalah masing-masing populasi mangsa, pemangsa pertama dan pemangsa kedua.  $r$  merupakan laju pertumbuhan logistik mangsa.  $\alpha_1, \alpha_2$  merupakan masing-masing laju penangkapan mangsa oleh pemangsa pertama dan pemangsa kedua.  $e_1, e_2$  adalah masing-masing laju konversi mangsa menjadi pemangsa pertama dan pemangsa kedua.  $g_1, g_2$  adalah masing-masing koefisien kompetisi intraspesifik pemangsa pertama dan pemangsa kedua.  $\beta_1, \beta_2$  adalah masing-masing koefisien kompetisi pemangsa pertama terhadap pemangsa kedua dan sebaliknya.  $d_1, d_2$  masing-masing laju kematian pemangsa pertama dan pemangsa kedua.  $q_1, q_2$  adalah laju ketertangkapan pemangsa pertama dan pemangsa kedua.  $E_1, E_2$  adalah angka pemanenan dari pemangsa pertama dan pemangsa kedua.

#### B. Analisis Titik Keseimbangan Model Tanpa Pemanenan

Berikut ini diberikan model mangsa-pemangsa tanpa pemanenan.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \alpha_1 PH_1 - \alpha_2 PH_2 \\ \frac{dH_1}{dt} &= e_1 \alpha_1 PH_1 - g_1 H_1^2 - \beta_1 H_1 H_2 - d_1 H_1 \\ \frac{dH_2}{dt} &= e_2 \alpha_2 PH_2 - g_2 H_2^2 - \beta_2 H_1 H_2 - d_2 H_2\end{aligned}\quad (3)$$

Titik keseimbangan yang memungkinkan pada sistem dinamika Eq.3 adalah

$$\begin{aligned}T_1(0, 0, 0), T_2(K, 0, 0), T_3\left(0, 0, -\frac{d_2}{g_2}\right), \\ T_4\left(\frac{K(d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2}, 0, \frac{r(K e_2 \alpha_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2}\right), \\ T_5\left(0, -\frac{d_1}{g_1}, 0\right), \\ T_6\left(\frac{K(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, \frac{r(K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, 0\right), \\ T_7\left(0, \frac{d_1 g_2 - d_2 \beta_1}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2}, \frac{d_2 g_1 - d_1 \beta_2}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2}\right), \\ T_8\left(\frac{K[B_1 - B_2]}{B_7}, \frac{B_3 - B_4}{B_7}, \frac{B_5 - B_6}{B_7}\right)\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}B_1 &= d_1 \alpha_2 \beta_2 + d_2 \alpha_1 \beta_1 + r \beta_1 \beta_2 \\ B_2 &= d_1 \alpha_1 g_2 + d_2 \alpha_2 g_1 + r g_1 g_2 \\ B_3 &= d_1 \alpha_1 g_2 + d_2 \alpha_2 g_1 + r g_1 g_2 \\ B_4 &= K d_2 e_1 \alpha_1 \alpha_2 + K r e_1 \alpha_1 g_2 + r d_2 \beta_1 \\ B_5 &= K d_2 e_1 \alpha_1^2 + K r e_1 \alpha_1 \beta_2 + r d_2 g_1 \\ B_6 &= K d_1 e_2 \alpha_1 \alpha_2 + K r e_2 \alpha_2 g_1 + r d_1 \beta_2 \\ B_7 &= K e_1 \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 + K e_2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 + r \beta_1 \beta_2 \\ &\quad - (K e_1 \alpha_1^2 g_2 + K e_2 \alpha_2^2 g_1 + r g_1 g_2)\end{aligned}$$

telah diketahui bahwa  $T_3\left(0, 0, -\frac{d_2}{g_2}\right)$  dan  $T_5\left(0, -\frac{d_1}{g_1}, 0\right)$  merupakan titik keseimbangan

yang tidak relevan dengan kondisi biologi sehingga tidak dapat dianalisis.  $T_4$  terwujud jika  $Ke_2\alpha_2 > d_2$ .  $T_6$  terwujud jika  $Ke_1\alpha_1 > d_1$ .  $T_7$  terwujud jika  $\beta_1\beta_2 > g_1g_2$ ,  $d_1g_2 > d_2\beta_1$  dan  $d_1\beta_2 < d_2g_1$ .  $T_8$  terwujud jika  $B_1 > B_2$ ,  $B_3 > B_4$ ,  $B_5 > B_6$  dan  $B_7 > 0$

#### C. Analisis Titik Keseimbangan Model dengan Pemanenan

Selanjutnya kami akan menganalisis titik keseimbangan dari Eq.2. Titik keseimbangan yang memungkinkan pada sistem dinamika Eq.1 adalah  $T_{1+}(0, 0, 0)$ ,  $T_{2+}(K, 0, 0)$ ,  $T_{3+}\left(0, 0, -\frac{E_2q_2+d_2}{g_2}\right)$ ,  $T_{4+}\left(\frac{K(E_2\alpha_2q_2+d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}, 0, \frac{r(Ke_2\alpha_2-E_2q_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}\right)$ ,  $T_{5+}\left(0, -\frac{E_1q_1+d_1}{g_1}, 0\right)$ ,  $T_{6+}\left(\frac{K(E_1\alpha_1q_1+d_1\alpha_1+rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2+rg_1}, \frac{r(Ke_1\alpha_1-E_1q_1-d_1)}{Ke_1\alpha_1^2+rg_1}, 0\right)$ ,  $T_{7+}\left(0, \frac{E_1g_2q_1-E_2\beta_1q_2+d_1g_2-d_2\beta_1}{\beta_1\beta_2-g_1g_2}, \frac{d_2g_1-d_1\beta_2}{\beta_1\beta_2-g_1g_2}\right)$ ,  $T_{8+}(P_+, H_{1+}^*, H_{2+}^*)$  dengan

$$\begin{aligned} P_+^* &= \frac{K((d_1 + E_1)s + (d_2 + E_2)t + ru)}{Ke_1\alpha_1s + Ke_2\alpha_2t + ru} \\ H_{1+}^* &= \frac{K\alpha_2v + Krw + rx}{Ke_1\alpha_1s + Ke_2\alpha_2t + ru} \\ &= \frac{(Ke_2\alpha_2^2 + rg_2)E_1 - (Ke_1\alpha_1\alpha_2 + r\beta_1)E_2}{Ke_1\alpha_1s + Ke_2\alpha_2t + ru} \\ H_{2+}^* &= -\frac{K\alpha_1v + Kry + rz}{Ke_1\alpha_1s + Ke_2\alpha_2t + ru} \\ &= -\frac{(Ke_1\alpha_1^2 + rg_1)E_2 - (Ke_2\alpha_1\alpha_2 + r\beta_2)E_1}{Ke_1\alpha_1s + Ke_2\alpha_2t + ru} \end{aligned}$$

diberikan  $s = \alpha_2\beta_2 - \alpha_1g_2$ ,  $t = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2g_1$ ,  $u = \alpha_2\beta_2 - \alpha_1g_2$ ,  $v = d_1e_2\alpha_2 - d_2e_1\alpha_1$ ,  $w = e_2\alpha_2\beta_1 - e_1\alpha_1g_2$ ,  $x = d_1g_2 - d_2\beta_1$ ,  $y = e_2\alpha_2g_1 - e_1\alpha_1\beta_2$ ,  $z = d_1\beta_2 - d_2g_1$  telah diketahui bahwa  $T_{3+}\left(0, 0, -\frac{E_2q_2+d_2}{g_2}\right)$  dan  $T_{5+}\left(0, -\frac{E_1q_1+d_1}{g_1}, 0\right)$  merupakan titik keseimbangan yang tidak relevan dengan kondisi biologi sehingga tidak dapat dianalisis.  $T_{4+}$  terwujud jika  $Ke_2\alpha_2 > E_2q_2 + d_2$ .  $T_{6+}$  terwujud jika  $Ke_1\alpha_1 > E_1q_1 + d_1$ .  $T_{7+}$  terwujud jika  $\beta_1\beta_2 > g_1g_2$ ,  $E_1g_2q_1 + d_1g_2 > E_2\beta_1q_2 + d_2\beta_1$  dan  $d_1\beta_2 < d_2g_1$ .  $T_{8+}$  terwujud jika  $\alpha_2\beta_2 > \alpha_1g_2$ ,  $\alpha_1\beta_1 > \alpha_2g_1$ ,  $\alpha_2\beta_2 > \alpha_1g_2$ ,  $d_1e_2\alpha_2 > d_2e_1\alpha_1$ ,  $e_2\alpha_2\beta_1 > e_1\alpha_1g_2$ ,  $d_1g_2 > d_2\beta_1$ ,  $g_1 > d_1$ ,  $d_2 > \beta_2$ ,  $d_1\beta_2 > d_2g_1$ , dan  $(Ke_1\alpha_1^2 + rg_1)E_2 > (Ke_2\alpha_1\alpha_2 + r\beta_2)E_1$ .

#### D. Analisis kestabilan titik keseimbangan model (3)

**Teorema 1** Titik keseimbangan  $T_4\left(\frac{K(d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}, 0, \frac{r(Ke_2\alpha_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}\right)$  akan stabil lokal jika  $\frac{e_1\alpha_1K(d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2} < \frac{\beta_1K(e_2\alpha_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2} + d_1$ ,  $r < \frac{2r(d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2} + \frac{\alpha_2K(e_2\alpha_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}$ ,  $\frac{e_2\alpha_2K(d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2} < \frac{2g_2r(Ke_2\alpha_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2} + d_2$  dan  $J_{11}^4J_{33}^4 > J_{13}^4J_{31}^4$ .

**Bukti.** Diberikan matriks Jacobi  $T_4\left(\frac{K(d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}, 0, \frac{r(Ke_2\alpha_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}\right)$  sebagai berikut.

$$J(T_4) = \begin{bmatrix} J_{11}^4 & J_{12}^4 & J_{13}^4 \\ J_{21}^4 & J_{22}^4 & J_{23}^4 \\ J_{31}^4 & J_{32}^4 & J_{33}^4 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} J_{11}^4 &= r - \frac{2r(d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - \frac{\alpha_2K(e_2\alpha_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} \\ J_{12}^4 &= -\frac{\alpha_1K(d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2}, \\ J_{13}^4 &= -\frac{\alpha_2K(d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} \\ J_{21}^4 &= 0, \\ J_{22}^4 &= \frac{e_1\alpha_1K(d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - \frac{\beta_1K(e_2\alpha_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - d_1 \\ J_{23}^4 &= 0, \\ J_{31}^4 &= \frac{e_2\alpha_2r(Ke_2\alpha_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2}, \\ J_{32}^4 &= -\frac{\beta_2r(Ke_2\alpha_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} \\ J_{33}^4 &= \frac{e_2\alpha_2K(d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - \frac{2g_2r(Ke_2\alpha_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - d_2 \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks  $J(T_4)$  diberikan sebagai berikut.

$$\det(J(T_4) - \lambda I) = 0 \quad (4)$$

Salah satu akar dari Eq.4 adalah  $\frac{e_1\alpha_1K(d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2} - \frac{\beta_1K(e_2\alpha_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2} - d_1$ . Nilai eigennya akan bernilai negatif jika  $\frac{e_1\alpha_1K(d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2} < \frac{\beta_1K(e_2\alpha_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2} + d_1$ . Dua nilai eigen lainnya merupakan akar-akar persamaan kuadrat berikut ini.

$$\lambda^2 - \lambda(J_{11}^4 + J_{33}^4) + J_{11}^4J_{33}^4 - J_{13}^4J_{31}^4 = 0 \quad (5)$$

Jumlah akar-akar dari Eq.5 bernilai positif jika  $(J_{11}^4 + J_{33}^4) < 0$ ,  $J_{11}^4 < 0$ ,  $J_{33}^4 < 0$ . Hasil kali akar-akarnya bernilai positif jika  $J_{11}^4J_{33}^4 > J_{13}^4J_{31}^4$ .

**Teorema 2** Titik keseimbangan  $T_6\left(\frac{K(d_1\alpha_1+rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2+rg_1}, \frac{r(Ke_1\alpha_1-d_1)}{Ke_1\alpha_1^2+rg_1}, 0\right)$  akan stabil jika

$$\frac{e_2 \alpha_2 K(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} < \frac{\beta_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} + d_2, r < \frac{2r(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} + \frac{\alpha_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, \frac{e_1 \alpha_1 K(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} < \frac{2g_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} + d_1 \text{ dan } J_{11}^6 J_{22}^6 > J_{12}^6 J_{21}^6.$$

**Bukti.** Diberikan matriks Jacobi

$$T_6 \left( \frac{K(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, \frac{r(K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, 0 \right) \text{ sebagai berikut.}$$

$$J(T_6) = \begin{bmatrix} J_{11}^6 & J_{12}^6 & J_{13}^6 \\ J_{21}^6 & J_{22}^6 & J_{23}^6 \\ J_{31}^6 & J_{32}^6 & J_{33}^6 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} J_{11}^6 &= r - \frac{2r(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - \frac{\alpha_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} \\ J_{12}^6 &= -\frac{\alpha_1 K(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, \\ J_{13}^6 &= -\frac{\alpha_2 K(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} \\ J_{21}^6 &= \frac{e_1 \alpha_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} \\ J_{22}^6 &= \frac{e_1 \alpha_1 K(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - \frac{2g_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - d_1 \\ J_{23}^6 &= -\frac{\beta_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, J_{31}^6 = 0, J_{32}^6 = 0 \\ J_{33}^6 &= \frac{e_2 \alpha_2 K(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - \frac{\beta_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - d_2 \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks  $J(T_6)$  diberikan sebagai berikut.

$$\det(J(T_6) - \lambda I) = 0 \quad (6)$$

Salah satu akar dari Eq.6 adalah  $\frac{e_2 \alpha_2 K(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - \frac{\beta_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - d_2$ . Nilai eigennya akan bernilai negatif jika  $\frac{e_2 \alpha_2 K(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} < \frac{\beta_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} + d_2$ . Dua nilai eigen lainnya merupakan akar-akar persamaan kuadrat berikut ini.

$$\lambda^2 - \lambda(J_{11}^6 + J_{22}^6) + J_{11}^6 J_{22}^6 - J_{12}^6 J_{21}^6 = 0 \quad (7)$$

Jumlah akar-akar dari Eq.7 bernilai positif jika  $(J_{11}^6 + J_{22}^6) < 0, J_{11}^6 < 0, J_{22}^6 < 0$ . Hasil kali akar-akarnya bernilai positif jika  $J_{11}^6 J_{22}^6 > J_{12}^6 J_{21}^6$ .

**Teorema 3** Titik keseimbangan  $T_7 \left( 0, \frac{d_1 g_2 - d_2 \beta_1}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2}, \frac{\alpha_2 (d_1 \beta_2 - d_2 g_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} \right)$  akan stabil jika  $r + \frac{\alpha_2 (d_1 \beta_2 - d_2 g_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} < \frac{\alpha_1 (d_1 g_2 - d_2 \beta_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2}, \frac{\beta_1 (d_1 \beta_2 - d_2 g_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} < \frac{2g_1 (d_1 g_2 - d_2 \beta_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} + d_1, \frac{2g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 g_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} < \frac{\beta_2 (d_1 g_2 - d_2 \beta_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} + d_2$  dan  $J_{22}^7 J_{33}^7 > J_{23}^7 J_{32}^7$ .

**Bukti.** Diberikan matriks Jacobi

$$T_7 \left( 0, \frac{d_1 g_2 - d_2 \beta_1}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2}, \frac{d_2 g_1 - d_1 \beta_2}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} \right) \text{ sebagai berikut.}$$

$$J(T_7) = \begin{bmatrix} J_{11}^7 & J_{12}^7 & J_{13}^7 \\ J_{21}^7 & J_{22}^7 & J_{23}^7 \\ J_{31}^7 & J_{32}^7 & J_{33}^7 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} J_{11}^7 &= r - \frac{\alpha_1 (d_1 g_2 - d_2 \beta_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} + \frac{\alpha_2 (d_1 \beta_2 - d_2 g_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} \\ J_{12}^7 &= 0, J_{13}^7 = 0 \\ J_{21}^7 &= \frac{e_1 \alpha_1 (d_1 g_2 - d_2 \beta_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} \\ J_{22}^7 &= -\frac{2g_1 (d_1 g_2 - d_2 \beta_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} + \frac{\beta_1 (d_1 \beta_2 - d_2 g_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} - d_1 \\ J_{23}^7 &= -\frac{\beta_1 (d_1 g_2 - d_2 \beta_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2}, \\ J_{31}^7 &= -\frac{e_2 \alpha_2 (d_1 \beta_2 - d_2 g_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2}, \\ J_{32}^7 &= \frac{\beta_2 (d_1 \beta_2 - d_2 g_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} \\ J_{33}^7 &= -\frac{\beta_2 (d_1 g_2 - d_2 \beta_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} + \frac{2g_2 (d_1 \beta_2 - d_2 g_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} - d_2 \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks  $J(T_7)$  diberikan sebagai berikut.

$$\det(J(T_7) - \lambda I) = 0 \quad (8)$$

Salah satu akar dari Eq.8 adalah  $r - \frac{\alpha_1 (d_1 g_2 - d_2 \beta_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} + \frac{\alpha_2 (d_1 \beta_2 - d_2 g_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2}$ . Nilai eigennya akan bernilai negatif jika  $r + \frac{\alpha_2 (d_1 \beta_2 - d_2 g_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2} < \frac{\alpha_1 (d_1 g_2 - d_2 \beta_1)}{\beta_1 \beta_2 - g_1 g_2}$ . Dua nilai eigen lainnya merupakan akar-akar persamaan kuadrat berikut ini.

$$\lambda^2 - \lambda(J_{22}^7 + J_{33}^7) + J_{22}^7 J_{33}^7 - J_{23}^7 J_{32}^7 = 0 \quad (9)$$

Jumlah akar-akar dari Eq.9 bernilai positif jika  $(J_{22}^7 + J_{33}^7) < 0, J_{22}^7 < 0, J_{33}^7 < 0$ . Hasil kali akar-akarnya bernilai positif jika  $J_{22}^7 J_{33}^7 > J_{23}^7 J_{32}^7$ .

**Teorema 4** Titik keseimbangan  $T_8(P^*, H_1^*, H_2^*)$  akan stabil jika  $r < \frac{2rP^*}{K} + \alpha_1 H_1^* + \alpha_2 H_2^*$ ,  $e_1 \alpha_1 P^* < 2g_1 H_1^* + \beta_1 H_2^* + d_1$ ,  $e_2 \alpha_2 P^* < \beta_2 H_1^* + 2g_2 H_2^* + d_2$ ,  $J_{11} J_{22} + J_{11} J_{33} + J_{22} J_{33} > J_{12} J_{21} + J_{13} J_{31} + J_{23} J_{32}$  dan  $-(J_{11} + J_{22} + J_{33})(J_{11} J_{22} + J_{11} J_{33} + J_{22} J_{33} - J_{12} J_{21} - J_{13} J_{31} - J_{23} J_{32}) > J_{11} J_{23} J_{32} + J_{12} J_{21} J_{33} + J_{13} J_{31} J_{22} - J_{11} J_{22} J_{33} - J_{12} J_{23} J_{31} - J_{13} J_{32} J_{21}$

**Bukti.** Diberikan matriks Jacobi dari  $T_8(P^*, H_1^*, H_2^*)$  sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned}
J_{11} &= r - \frac{2rP^*}{K} - \alpha_1 H_1^* - \alpha_2 H_2^*, J_{12} = -\alpha_1 P^*, \\
J_{13} &= -\alpha_2 P^* J_{21} = e_1 \alpha_1 H_1^*, \\
J_{22} &= e_1 \alpha_1 P^* - 2g_1 H_1^* - \beta_1 H_2^* - d_1, \\
J_{23} &= -\beta_1 H_1^*, J_{31} = e_2 \alpha_2 H_2^*, \\
J_{32} &= -\beta_2 H_2^*, \\
J_{33} &= e_2 \alpha_2 P^* - \beta_2 H_1^* - 2g_2 H_2^* - d_2 \\
P^* &= \frac{K(d_1 s + d_2 t + ru)}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru} \\
H_1^* &= \frac{K \alpha_2 v + Krw + rx}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru} \\
H_2^* &= -\frac{K \alpha_1 v + Kr y + rz}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru} \\
s &= \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 g_2, t = \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 g_1, u \\
&= \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 g_2, \\
v &= d_1 e_2 \alpha_2 - d_2 e_1 \alpha_1, w = e_2 \alpha_2 \beta_1 - e_1 \alpha_1 g_2, \\
x &= d_1 g_2 - d_2 \beta_1, y = e_2 \alpha_2 g_1 - e_1 \alpha_1 \beta_2, z = \\
&= d_1 \beta_2 - d_2 g_1.
\end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobi diatas adalah

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= -(J_{11} + J_{22} + J_{33}) \\
A_2 &= J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} - J_{12}J_{21} - J_{13}J_{31} \\
&\quad - J_{23}J_{32} \\
A_3 &= J_{11}J_{23}J_{32} + J_{12}J_{21}J_{33} + J_{13}J_{31}J_{22} - J_{11}J_{22}J_{33} \\
&\quad - J_{12}J_{23}J_{31} - J_{13}J_{32}J_{21}
\end{aligned}$$

Nilai eigen dari Eq.10 akan bernilai negatif, jika  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$ ,  $A_3 > 0$ , dan  $A_1 A_2 > A_3$ .

#### A. Analisis kestabilan titik keseimbangan model (2)

##### Teorema 5 Titik keseimbangan

$T_{4+} \left( \frac{K(E_2 \alpha_2 q_2 + d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2}, 0, \frac{r(K e_2 \alpha_2 - E_2 q_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} \right)$  akan stabil jika  $\frac{e_1 \alpha_1 K(E_2 \alpha_2 q_2 + d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} < \frac{\beta_1 K(K e_2 \alpha_2 - E_2 q_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} + E_1 q_1 + d_1, r < \frac{2r(E_2 \alpha_2 q_2 + d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} + \frac{\alpha_2 r(K e_2 \alpha_2 - E_2 q_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2}, \frac{e_2 \alpha_2 K(E_2 \alpha_2 q_2 + d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} < \frac{2g_2 r(K e_2 \alpha_2 - E_2 q_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} + d_2$  dan  $J_{11}^{4+} J_{33}^{4+} > J_{13}^{4+} J_{31}^{4+}$ .

Bukti. Diberikan matriks Jacobi

$T_{4+} \left( \frac{K(E_2 \alpha_2 q_2 + d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2}, 0, \frac{r(K e_2 \alpha_2 - E_2 q_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} \right)$  sebagai berikut.

$$J(T_4) = \begin{bmatrix} J_{11}^{4+} & J_{12}^{4+} & J_{13}^{4+} \\ J_{21}^{4+} & J_{22}^{4+} & J_{23}^{4+} \\ J_{31}^{4+} & J_{32}^{4+} & J_{33}^{4+} \end{bmatrix}$$

dengan

$$J_{11}^{4+} = r - \frac{2r(E_2 \alpha_2 q_2 + d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\alpha_2 r(K e_2 \alpha_2 - E_2 q_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} \\
J_{12}^{4+} &= - \frac{\alpha_1 K(E_2 \alpha_2 q_2 + d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} \\
J_{13}^{4+} &= - \frac{\alpha_2 K(E_2 \alpha_2 q_2 + d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} \\
J_{21}^{4+} &= 0, \\
J_{22}^{4+} &= \frac{e_1 \alpha_1 K(E_2 \alpha_2 q_2 + d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} \\
& - \frac{\beta_1 K(K e_2 \alpha_2 - E_2 q_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} - E_1 q_1 - d_1 \\
J_{23}^{4+} &= 0, J_{31}^{4+} = \frac{e_2 \alpha_2 r(K e_2 \alpha_2 - E_2 q_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2}, \\
J_{32}^{4+} &= - \frac{\beta_2 r(K e_2 \alpha_2 - E_2 q_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} \\
J_{33}^{4+} &= \frac{e_2 \alpha_2 K(E_2 \alpha_2 q_2 + d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} \\
& - \frac{2g_2 r(K e_2 \alpha_2 - E_2 q_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} - d_2
\end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks  $J(T_{4+})$  diberikan sebagai berikut.

$$\det(J(T_{4+}) - \lambda I) = 0 \quad (11)$$

Salah satu akar dari Eq.11 adalah  $\frac{e_1 \alpha_1 K(E_2 \alpha_2 q_2 + d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} - \frac{\beta_1 K(K e_2 \alpha_2 - E_2 q_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} - E_1 q_1 - d_1$ . Nilai eigennya akan bernilai negatif jika  $\frac{e_1 \alpha_1 K(E_2 \alpha_2 q_2 + d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} < \frac{\beta_1 K(K e_2 \alpha_2 - E_2 q_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} + E_1 q_1 + d_1$

Dua nilai eigen lainnya merupakan akar-akar persamaan kuadrat berikut ini.

$$\lambda^2 - \lambda(J_{11}^{4+} + J_{33}^{4+}) + J_{11}^{4+} J_{33}^{4+} - J_{13}^{4+} J_{31}^{4+} = 0 \quad (12)$$

Jumlah akar-akar dari Eq.12 bernilai positif jika  $(J_{11}^{4+} + J_{33}^{4+}) < 0$ ,  $J_{11}^{4+} < 0$ ,  $J_{33}^{4+} < 0$ . Hasil kali akar-akarnya bernilai positif jika  $J_{11}^{4+} J_{33}^{4+} > J_{13}^{4+} J_{31}^{4+}$ .

##### Teorema 6 Titik keseimbangan

$T E_6 \left( \frac{K(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, \frac{r(K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, 0 \right)$  akan stabil jika  $\frac{e_2 \alpha_2 K(E_1 \alpha_1 q_1 + d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} < \frac{\beta_2 r(K e_1 \alpha_1 - E_1 q_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} + E_2 q_2 + d_2, r < \frac{2r(E_1 \alpha_1 q_1 + d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} + \frac{\alpha_1 r(K e_1 \alpha_1 - E_1 q_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, \frac{e_1 \alpha_1 K(E_1 \alpha_1 q_1 + d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} < \frac{2g_1 r(K e_1 \alpha_1 - E_1 q_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} + E_1 q_1 + d_1$  dan  $J_{11}^{6+} J_{22}^{6+} > J_{12}^{6+} J_{21}^{6+}$ .

Bukti. Diberikan matriks Jacobi

$T_{6+} \left( \frac{K(E_1 \alpha_1 q_1 + d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, \frac{r(K e_1 \alpha_1 - E_1 q_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, 0 \right)$  sebagai berikut.

$$J(T_{6+}) = \begin{bmatrix} J_{11}^{6+} & J_{12}^{6+} & J_{13}^{6+} \\ J_{21}^{6+} & J_{22}^{6+} & J_{23}^{6+} \\ J_{31}^{6+} & J_{32}^{6+} & J_{33}^{6+} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 J_{11}^{6+} &= r - \frac{2r(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} \\
 &\quad - \frac{\alpha_1r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} \\
 J_{12}^{6+} &= -\frac{\alpha_1K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1}, \\
 J_{13}^{6+} &= -\frac{\alpha_2K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} \\
 J_{21}^{6+} &= \frac{e_1\alpha_1r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} \\
 J_{22}^{6+} &= \frac{e_1\alpha_1K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} \\
 &\quad - \frac{2g_1r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} - E_1q_1 - d_1 \\
 J_{23}^{6+} &= -\frac{\beta_1r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1}, \\
 J_{31}^{6+} &= 0, J_{32}^{6+} = 0 \\
 J_{33}^{6+} &= \frac{e_2\alpha_2K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} \\
 &\quad - \frac{\beta_2r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} - E_2q_2 - d_2
 \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks  $J(T_{6+})$  diberikan sebagai berikut.

$$\det(J(T_{6+}) - \lambda I) = 0 \quad (13)$$

Salah satu akar dari Eq.13 adalah  $\frac{e_2\alpha_2K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} - \frac{\beta_2r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} - E_2q_2 - d_2$ . Nilai eigennya akan bernilai negatif jika

$$\begin{aligned}
 &\frac{e_2\alpha_2K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} < \\
 &\frac{\beta_2r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} + E_2q_2 + d_2
 \end{aligned}$$

Dua nilai eigen lainnya merupakan akar-akar persamaan kuadrat berikut ini.

$$\lambda^2 - \lambda(J_{11}^{6+} + J_{22}^{6+}) + J_{11}^{6+}J_{22}^{6+} - J_{12}^{6+}J_{21}^{6+} = 0 \quad (14)$$

Jumlah akar-akar dari Eq.14 bernilai positif jika  $(J_{11}^{6+} + J_{22}^{6+}) < 0, J_{11}^{6+} < 0, J_{22}^{6+} < 0$ . Hasil kali akar-akarnya bernilai positif jika  $J_{11}^{6+}J_{22}^{6+} > J_{12}^{6+}J_{21}^{6+}$ .

**Teorema 7** Titik keseimbangan  $T_{7+}$   $\left(0, \frac{E_1g_2q_1 - E_2\beta_1q_2 + d_1g_2 - d_2\beta_1}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2}, \frac{E_2g_1q_2 - E_1\beta_2q_1 + d_2g_1 - d_1\beta_2}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2}\right)$  akan stabil jika  $r + \frac{\alpha_2(d_1\beta_2 - d_2g_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2} < \frac{\alpha_1(d_1g_2 - d_2\beta_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2}$ ,  $J_{22}^{7+} < 0, J_{33}^{7+} < 0$  dan  $J_{22}^{7+}J_{33}^{7+} > J_{23}^{7+}J_{32}^{7+}$ .

**Bukti.** Diberikan matriks Jacobi

$$T_{7+} \left(0, \frac{E_1g_2q_1 - E_2\beta_1q_2 + d_1g_2 - d_2\beta_1}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2}, \frac{E_2g_1q_2 - E_1\beta_2q_1 + d_2g_1 - d_1\beta_2}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2}\right) \text{ sebagai berikut.}$$

$$J(T_7) = \begin{bmatrix} J_{11}^{7+} & J_{12}^{7+} & J_{13}^{7+} \\ J_{21}^{7+} & J_{22}^{7+} & J_{23}^{7+} \\ J_{31}^{7+} & J_{32}^{7+} & J_{33}^{7+} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 J_{11}^{7+} &= r - \frac{\alpha_1(E_1g_2q_1 - E_2\beta_1q_2 + d_1g_2 - d_2\beta_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2} \\
 &\quad + \frac{\alpha_2(E_1\beta_2q_1 - E_2g_1q_2 + d_1\beta_2 - d_2g_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2} \\
 J_{12}^{7+} &= 0, J_{13}^{7+} = 0 \\
 J_{21}^{7+} &= \frac{e_1\alpha_1(E_1g_2q_1 - E_2\beta_1q_2 + d_1g_2 - d_2\beta_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2} \\
 J_{22}^{7+} &= -\frac{2g_1(E_1g_2q_1 - E_2\beta_1q_2 + d_1g_2 - d_2\beta_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2} \\
 &\quad + \frac{\beta_1(E_1\beta_2q_1 - E_2g_1q_2 + d_1\beta_2 - d_2g_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2} \\
 &\quad - E_1q_1 - d_1 \\
 J_{23}^{7+} &= -\frac{\beta_1(E_1g_2q_1 - E_2\beta_1q_2 + d_1g_2 - d_2\beta_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2}, \\
 J_{31}^{7+} &= -\frac{e_2\alpha_2(E_1\beta_2q_1 - E_2g_1q_2 + d_1\beta_2 - d_2g_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2}, \\
 J_{32}^{7+} &= \frac{\beta_2(E_1\beta_2q_1 - E_2g_1q_2 + d_1\beta_2 - d_2g_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2} \\
 J_{33}^{7+} &= -\frac{\beta_2(E_1g_2q_1 - E_2\beta_1q_2 + d_1g_2 - d_2\beta_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2} \\
 &\quad + \frac{2g_2(E_1\beta_2q_1 - E_2g_1q_2 + d_1\beta_2 - d_2g_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2} \\
 &\quad - E_2q_2 - d_2
 \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks  $J(T_{7+})$  diberikan sebagai berikut.

$$\det(J(T_{7+}) - \lambda I) = 0 \quad (15)$$

Salah satu akar dari Eq.15 adalah  $r - \frac{\alpha_1(d_1g_2 - d_2\beta_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2} + \frac{\alpha_2(d_1\beta_2 - d_2g_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2}$ . Nilai eigennya akan bernilai negatif jika  $r + \frac{\alpha_2(d_1\beta_2 - d_2g_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2} < \frac{\alpha_1(d_1g_2 - d_2\beta_1)}{\beta_1\beta_2 - g_1g_2}$ . Dua nilai eigen lainnya merupakan akar-akar persamaan kuadrat berikut ini.

$$\lambda^2 - \lambda(J_{22}^{7+} + J_{33}^{7+}) + J_{22}^{7+}J_{33}^{7+} - J_{23}^{7+}J_{32}^{7+} = 0 \quad (16)$$

Jumlah akar-akar dari Eq.16 bernilai positif jika  $(J_{22}^{7+} + J_{33}^{7+}) < 0, J_{22}^{7+} < 0, J_{33}^{7+} < 0$ . Hasil kali akar-akarnya bernilai positif jika  $J_{22}^{7+}J_{33}^{7+} > J_{23}^{7+}J_{32}^{7+}$ .

**Teorema 8** Titik keseimbangan  $T_{8+}(P_+, H_{1+}^*, H_{2+}^*)$  akan stabil jika  $J_{11} < 0, J_{22} < 0, J_{33} < 0$ ,  $J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} > J_{12}J_{21} + J_{13}J_{31} + J_{23}J_{32}$  dan  $-(J_{11} + J_{22} + J_{33})(J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} - J_{12}J_{21} - J_{13}J_{31} - J_{23}J_{32}) > J_{11}J_{23}J_{32} + J_{12}J_{21}J_{33} + J_{13}J_{31}J_{22} - J_{11}J_{22}J_{33} - J_{12}J_{23}J_{31} - J_{13}J_{32}J_{21}$ .

**Bukti.** Diberikan matriks Jacobi dari  $T_{8+}(P_+, H_{1+}^*, H_{2+}^*)$  sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} J_{11} &= r - \frac{2rP^*}{K} - \alpha_1 H_1^* - \alpha_2 H_2^*, J_{12} = -\alpha_1 P^*, \\ J_{13} &= -\alpha_2 P^*, J_{21} = e_1 \alpha_1 H_1^*, \\ J_{22} &= e_1 \alpha_1 P^* - 2g_1 H_1^* - \beta_1 H_2^* - d_1, \\ J_{23} &= -\beta_1 H_1^*, J_{31} = e_2 \alpha_2 H_2^*, \\ J_{32} &= -\beta_2 H_2^*, \\ J_{33} &= e_2 \alpha_2 P^* - \beta_2 H_1^* - 2g_2 H_2^* - d_2 \\ P_+^* &= \frac{K((d_1 + E_1)s + (d_2 + E_2)t + ru)}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru} \\ H_{1+}^* &= \frac{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru} \\ &+ \frac{(Ke_2 \alpha_2^2 + rg_2)E_1 - (Ke_1 \alpha_1 \alpha_2 + r\beta_1)E_2}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru} \\ &+ \frac{K\alpha_1 v + Krw + rx}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru} \\ H_{2+}^* &= -\frac{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru} \\ &+ \frac{(Ke_1 \alpha_1^2 + rg_1)E_2 - (Ke_2 \alpha_1 \alpha_2 + r\beta_2)E_1}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru} \\ &+ \frac{K\alpha_1 v + Krz + ry}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru} \\ s &= \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 g_2, t = \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 g_1, \\ u &= \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 g_2, \\ v &= d_1 e_2 \alpha_2 - d_2 e_1 \alpha_1, w = e_2 \alpha_2 \beta_1 - e_1 \alpha_1 g_2, \\ x &= d_1 g_2 - d_2 \beta_1, y = e_2 \alpha_2 g_1 - e_1 \alpha_1 \beta_2, z = \\ &d_1 \beta_2 - d_2 g_1. \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobi diatas adalah

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -(J_{11} + J_{22} + J_{33}) \\ A_2 &= J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} \\ &\quad - J_{12}J_{21} - J_{13}J_{31} - J_{23}J_{32} \\ A_3 &= J_{11}J_{23}J_{32} + J_{12}J_{21}J_{33} + J_{13}J_{31}J_{22} \\ &\quad - J_{11}J_{22}J_{33} - J_{12}J_{23}J_{31} - J_{13}J_{32}J_{21} \end{aligned}$$

Nilai eigen dari Eq.17 bernilai negatif, yakni  $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0$ , dan  $A_1 A_2 > A_3$ .

#### F. Simulasi numerik tanpa pemanenan

Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi yaitu  $r = 1.5, K = 10000, \alpha_1 = 0.000021, \alpha_2 = 0.000022, e_1 = 0.5, e_2 = 0.5, d_1 = 0.00055, d_2 = 0.00065, \beta_1 = 0.0000008, \beta_2 = 0.000001, g_1 = 0.000022, g_2 = 0.000022, q_1 = q_2 = 1$ . Titik keseimbangan yang diperoleh yaitu  $TE_8 = (8819.950583, 4031.897805, 4197.161755)$

Matriks Jacobi dari  $TE_8$  adalah

$$J(TE_8) = \begin{bmatrix} -1.322992588 & -0.1852189622 & -0.1940389128 \\ 0.04233492695 & -0.08870175168 & -0.003225518244 \\ 0.04616977930 & -0.004197161755 & -0.09233755860 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik yang dibentuk dari  $J(TE_8)$  adalah

$$\lambda^3 + 1.504031898\lambda^2 + 0.2644904019\lambda + 0.01227468204$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah

$$(-1.30916364790300, -0.108270937043246, -0.08659731333337525)$$

#### G. Simulasi numerik dengan pemanenan

Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi yaitu  $r = 1.5, K = 10000, \alpha_1 = 0.000021, \alpha_2 = 0.000022, e_1 = 0.5, e_2 = 0.5, d_1 = 0.00055, d_2 = 0.00065, \beta_1 = 0.0000008, \beta_2 = 0.000001, g_1 = 0.000022, g_2 = 0.000022, q_1 = q_2 = 1$ . Nilai parameter pemanenan yang digunakan yaitu  $E_1 = 0.052, E_2 = 0.054$ .

Titik keseimbangan yang diperoleh dari simulasi dari Eq.2 yaitu

$$T_{8+} = (9404.936818, 2022.758611, 2126.433927).$$

Matriks Jacobi dari  $TE_{8+}$  adalah

$$J(TE_{8+}) = \begin{bmatrix} -1.410740522 & -0.1975036732 & -0.2069086100 \\ 0.02123896542 & -0.04450068943 & -0.001618206889 \\ 0.02339077320 & -0.002126433927 & -0.04678154640 \end{bmatrix}$$

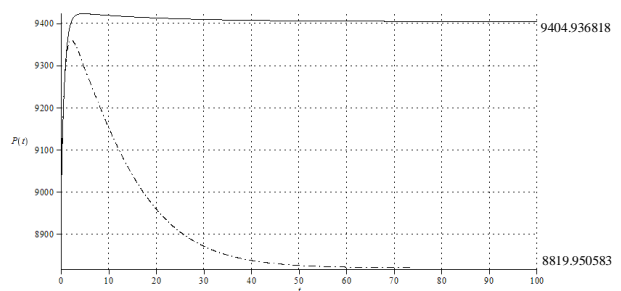
Persamaan karakteristik yang dibentuk dari  $J(T_{8+})$  adalah

$$\lambda^3 + 1.4502022758\lambda^2 + 0.1398884452\lambda + 0.003326830776$$

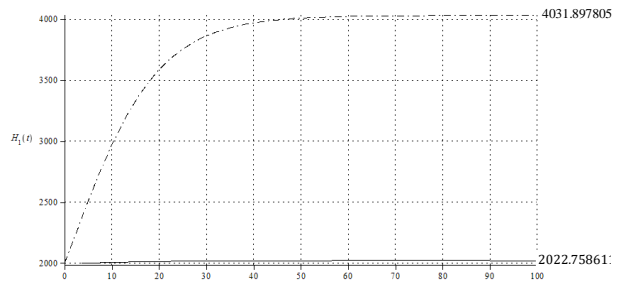
Nilai eigen yang diperoleh adalah

$$(-1.40408032485907, -0.0543357305177096, -0.0436067024532149)$$

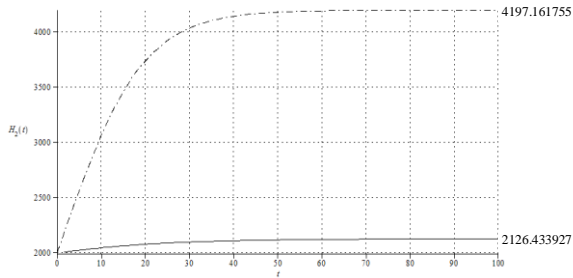
Dengan menggunakan nilai awal  $P(0) = 9000, H_1(0) = 2000, H_2(0) = 2000$  maka diperoleh hasil simulasi dari Eq.2 dan Eq. 3 adalah sebagai berikut sebagai berikut.



Gambar 2. Plot pertumbuhan populasi mangsa



Gambar 3. Plot pertumbuhan populasi pemangsa pertama



Gambar 4. Plot pertumbuhan populasi pemangsa kedua

## V. KESIMPULAN

Model mangsa-pemangsa dengan dan tanpa pemanenan memiliki dinamika populasi yang sangat berbeda. Kebijakan dengan memanen populasi pemangsa memberi dampak pada peningkatan kepadatan populasi mangsa. Walaupun kepadatan populasi pemangsa berkurang setelah pemanenan, namun tidak mengganggu kestabilan sistem.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Kami ucapkan terima kasih pada semua tim peneliti yang telah memberi sumbangsih pengetahuan dan saran.

## DAFTAR PUSTAKA

- Agarwal, M. dan Pathak, R. 2012. Persistence and Optimal Harvesting of Prey-Predator Model with Hollig Type III Fuctional Response. *International Journal of Engineering, Science and Technology*. 43: 78-96.
- Alebraheem, J. dan Abu Hasan, Y. 2012. Persistence of Predators in a Two Predators-One Prey Model with Non-Periodic Solution. *Applied Mathematical Sciences*. 19: 943-956.
- Das, K. 2011. A Mathematical Study of a Predator-Prey Dynamics with Disease in Predator. *Applied Mathematics*. 2011: 1-6.
- Farajzadeh, A., Doust, M.H.R., Haghighifar, F. dan Baleanu, D. 2011. The Stability of Gauss Model Having One Prey and Two Predators. *Applied Analysis*: 219640: 1-9.
- Gupta, R.P. dan Chandra, P. 2017. Dynamical properties of a prey-predator-scavenger model with quadratic harvesting. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 1-18.
- Kar, T.K. dan Matsuda, H. 2007. Global Dynamics and Controllability of A Harvested Prey-Predator System with Holling Type III Functional Response. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. 1: 59-67.
- Kar, T. K. 2010. A Dynamic Reaction Model of a Prey-predator System with Stage-structure for Predator. *Modern Applied Science*. 4:183-195.
- Mukhopadhyay, B. dan Bhattacharyya, R. 2015. Effects of Harvesting and Predator Interference in A Model of Two Predators Competing for A Single Prey. *Applied Mathematical Modelling*. 000: 1-11.
- Ndam, J. N., Chollom, J. P. and Kassem, T. G. 2012. A Mathematical Model of Three-Species Interactions in an Aquatic Habitat. *Applied Mathematics*. 2012:1-11.
- Upadhyay, R. K., dan Raw, S. N. 2011. Complex Dynamics of a Three Species Food-chain Model with Holling Type IV Functional Response. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. 16: 353-374.